F. Schweiger (Universität Salzburg)

Funktionen in mehreren Variablen - Aschenputtel der Schulmathematik

1. Warum neue Stoffe?

Die erste Frage, die man beim Lesen des Titels stellen wird, ist wohl: Warum wird schon wieder etwas Neues für die Schule vorgeschlagen? Nun ich werde versuchen zu zeigen, daß zumindest weite Teile dieses Themas schon längst ihren festen Platz in der Schulmathematik gefunden haben. Aber es sind nicht nur neue Perspektiven einzubringen, sondern es erscheint meines Erachtens tatsächlich sinnvoll, in der Oberstufe Grundzüge der Analysis von Funktionen in mehreren Variablen zu besprechen. Daher möchte ich zunächst ein Plädoyer für die Beachtung neuer Stoffe im Schulunterricht abgeben.

Wenn die Brunersche These von der inneren strukturellen Verwandtschaft des Lernens und Forschens bei Schüler, Lehrer, Forscher und Ingenieur zutrifft, so bedeutet dies, daß die Bereitschaft, ja das Verlangen, etwas Neues zu lernen und zu erfahren für mathematische Tätigkeit bestimmend ist. Nicht die Inhalte (Banachräume sind ja tatsächlich meilenwert von der Parameterdarstellung einer Geraden entfernt), sondern das Abenteuer des Neuen und die Freude am Entdecken stellen das einigende Band zwischen Schüler und Forscher, Lehrer und Ingenieur dar. Kreativität kann vermutlich nur vermittelt werden, wenn man selbst kreativ tätig ist. Damit ergibt sich aber für den Lehrer der Auftrag, bei der Erschließung neuer Stoffgebiete kreativ tätig zu sein. Auch der drohenden Gefahr der Routine muß entgegengewirkt werden.

Aber müßte nicht der Lehrplan „entrümpelt" werden.? Schon das Wort „entrümpeln" ist ein falsches Signal, denn gewiß ist die Wichtigkeit verschiedener Inhalte stets neu zu bewerten, aber Mathematik lernen, bedeutet in erster Linie, sich eine Technik des Schließens und eine Einsicht über die Möglichkeiten menschlichen Denkens anzueignen, die weitgehend von den verwendeten Inhalten unabhängig sind. In anderen Worten: Schon der Nachvollzug der Entdeckung irrationaler Zahlenverhältnisse im Fünfeck oder im Quadrat ist beste Mathematik! Ich bin auch der Meinung, daß der Lehrplan dringend einer gewissen Anreicherung bedürfte (allerdings mit Wahlmöglichkeiten). Manche

Bereiche sind bereits stark verdünnt. Analytische Geometrie gibt es fast nur für Gerade und Kreis, Ebene und Kugel, und für diese geometrisch so einsichtigen Dinge ist sie nicht nötig; Analysis wird fast nur mehr mit Polynomen betrieben, wo die Problematik des Grenzwertes gar nicht so recht einleuchtet. Die Anreicherung mit vielen Möglichkeiten entspricht unserer Lebenswelt: Wir haben in unserer Zeit mehr Berufschancen, mehr Freizeitangebote, mehr Reisemöglichkeiten, eine breite Palette von Nahrungsmitteln und Getränken, aber bloß ein Einheitsmenü in der Schule.

Zum Thema Funktionen in mehreren Variablen ist noch anzumerken, daß der Einsatz des Computers, insbesonders von Computeralgebra möglich und sinnvoll ist. Besonders im Bereich der graphischen Veranschaulichung von Funktionen als Gebirge oder mittels Höhenlinien liegen viele Möglichkeiten. Durch die neuen Möglichkeiten des Computers ist eine Neugestaltung des Curriculums sicher notwendig, die meines Erachtens von folgenden Thesen geleitet sein sollte:

- Mathematikunterricht muß vor allem das leisten, was der Computer nicht leistet.
- Der Computer soll aber als vielfältiges Werkzeug seinen Platz finden.

2. Funktionen in zwei oder mehr Variablen

Wie schon bemerkt, ist vieles davon kein neuer Stoff, denn Funktionen in zwei oder mehr Variablen sind schon immer dagewesen, unbedankt und nicht einmal beim Namen genannt. Sie verdienen daher, endlich als Thema anerkannt zu werden und in Folge ausgebaut zu werden. Funktionen in zwei oder mehr Variablen treten schon ganz am Anfang des Mathematikunterrichts auf, denn alle Rechenoperationen laufen nach dem Prinzip „Aus zwei oder mehreren Zahlen mach eine!“. In anderen Worten: Addition und Multiplikation, Subtraktion und Division sind Funktionen in zwei Variablen. Ein wichtiges Unterrichtsziel ist es, die Auswirkungen der Änderung einer Eingabe zu untersuchen. Dabei kann früh erkannt werden, daß Änderungen der Form x a $x + \varepsilon$ sich mit Addition und Subtraktion etwas besser vertragen als Änderungen der Form x a kx, die besser zu Multiplikation und Division passen. Weiters ist zu denken an die zahlreichen Formeln für Flächeninhalt, Umfang, Rauminhalt, Oberfläche usw., bei denen in der Regel mehrere Bestimmungsstücke eingehen. Nur zur Illustration liste ich auf:

$$U = a + b + c$$

$$A = a.b$$

$$A = \frac{(a+c).h}{2}$$

$$O = r\pi.s$$

$$V = \frac{G.h}{3}$$

Schon direkte und indirekte Proportionalität können als Funktion in zwei Variablen (Eingabe und Proportionalitätsfaktor, z.B. Menge und Preis) betrachtet werden. Die Formel für den Dreisatz enthält letztlich drei Variablen.

Die Länge eines Vektors ist eine Funktion in zwei (oder im Raum in drei) Variablen. Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen ist sogar eine Funktion in drei Variablen:

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Algebraisches Rechnen mit mehreren Variablen ist seit Jahrhunderten auch in der Schule üblich, wie man an bekannten Identitäten sieht:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Ebenso sind die geläufigen Rechengesetze (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz usw.) Identitäten in mehreren Variablen.

Formeln aus Physik und Chemie enthalten in der Regel mehrere Größen und Parameter:

$s = \frac{g}{2} t^2$

$E = mc^2$

$pV = RT$

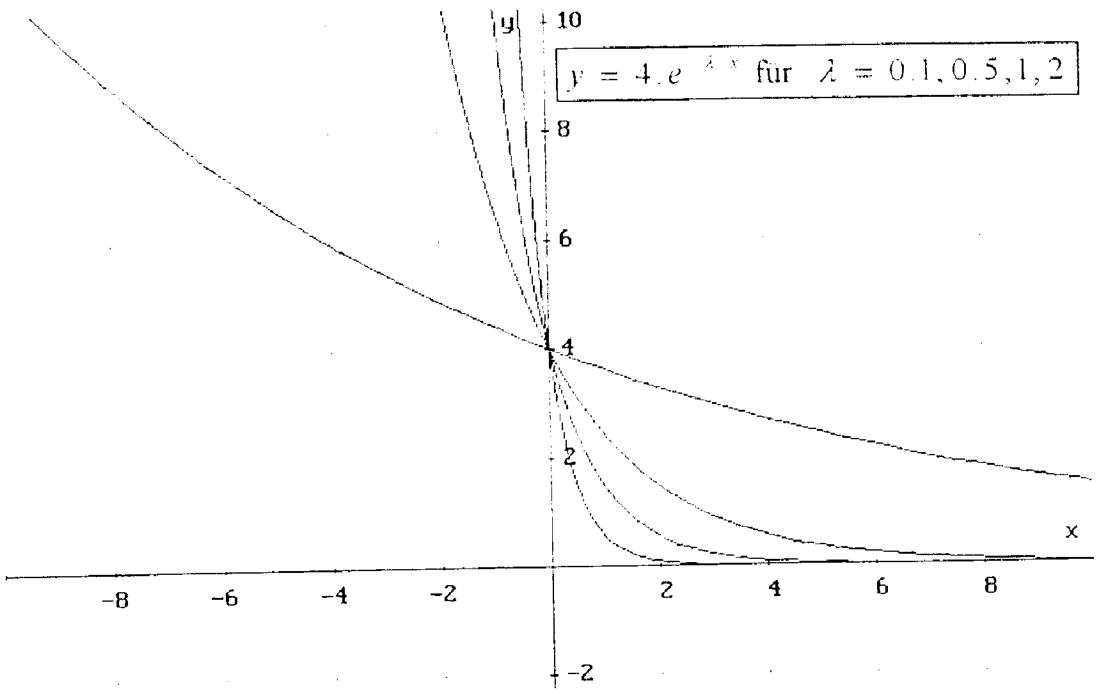
$x(t) = A e^{-kt} \sin \omega t$

$c = \lambda \nu$

Das Fallgesetz ist scheinbar bloß eindimensional, aber die Frage, ob sich auf dem Mond die Fallkonstante g ändert, kann Ausgangspunkt interessanter Überlegungen sein!
Bei vielen Formeln bietet sich die Frage an, warum gewisse Formeln so gebaut sein müssen. Formeln für Umfänge müssen aus der Addition von Längen entstehen, Formeln für Flächeninhalte müssen letztlich „quadratisch" sein (d.h. bei der Änderung aller Bestimmungsstücke durch x a kx, geometrisch eine zentrische Streckung, muß sich der Flächeninhalt um k^2 ändern - ein schönes Beispiel liefert die Heronische Flächenformel für das Dreieck) usw. Alles, was in der Physik unter dem Stichwort „Dimension" läuft, gehört hierher. Bei diesen Formeln kann man erneut die Auswirkung von Änderungen der Bestimmungsstücke bzw. den Einfluß von Zuwächsen diskutieren. Es ist auch darauf hinzuweisen, daß es letztlich nur wenige Typen von Formeln sind, die immer wieder vorkommen, die aber besonders gut verstanden werden sollten, wie etwa

$z = x + y, z = x y, z = \frac{x}{y}, \ldots\ldots$

Ein weiterer Zugang zu diesem Thema liegt in der Untersuchung von Parametern in Funktionen, wie sie als Basis von Exponential- oder Logarithmusfunktionen, Abklingkonstanten, Frequenzen und Amplituden auftreten. Die Auswirkungen von Änderungen von derartigen Parametern auf das Verhalten der Funktion bzw. die Gestalt des Funktionsgraphen ist ebenso mit Computergraphik leichter als bisher zu verfolgen.



3. Warum Funktionen in mehreren Variablen?

Dennoch ist es hilfreich, einige Gründe zusammenzustellen, die für die bewußte Behandlung dieses Themas sprechen. Zu nennen sind die enorme Reichweite und Anwendbarkeit, sowohl in der Mathematik als auch in den Naturwissenschaften bzw. in naturwissenschaftlich orientierten Teilen anderer Wissenschaften. Damit ergibt sich die Möglichkeit, Querverbindungen innerhalb der Mathematik und zu Nachbardisziplinen aufzuzeigen. Die Betrachtung von Funktionen in mehreren Variablen könnte auch zu einem besseren Verständnis wichtiger mathematischer Werkzeuge beitragen. Der Funktionsbegriff erfährt eine Ausweitung, die Analysis in einer Variablen wird in einen sinnvollen Zusammenhang gestellt und der Begriff der Stetigkeit wird bei Abbildungen der Ebene in die reelle Achse oder in die Ebene erst richtig anschaulich (die Topologie der Ebene oder des Raumes ist anschaulicher als die Topologie der Geraden!). Überlegenswert ist auch eine mögliche Steigerung der Flexibilität im Umgang mit mathematischer Notation, da die Variable eben nicht nur x heißen kann.

Die graphische Darstellung von Funktionen in zwei Variablen ist eine Herausforderung an das räumlichen Vorstellungsvermögen und kann so zu dessen Schulung beitragen. Besonders wichtig erscheint mir, daß durch die Modellierung des Zusammenwirkens mehrerer Ursachen (unter Beachtung einer möglichen Kompensation) zur Entwicklung des multikausalen Denkens beigetragen werden könnte. Viel zu oft ist in Darstellungen wirtschaftlicher oder politischer Zusammenhänge von **der** Ursache die Rede, als ob nicht das oft unüberschaubare Zusammenwirken vieler Faktoren die Komplexität des Problems ausmachen würde.

Ich denke auch an eine Erhöhung der mathematischen Lesefähigkeit. Unsere 1000-Schillingnote zeigt das Bild von Erwin Schrödinger und ein großes Psi (Ψ), aber selbst ein Maturant könnte die Schrödingergleichung nicht einmal lesen, da er die Symbolik der partiellen Ableitung nicht kennt! Die Kenntnis der partiellen Ableitung ist auch als Vorbereitung für weiterführende Studien wichtig.

4. Analysis mit Funktionen mehrerer Variablen

Eine Unterrichtssequenz zu diesem Thema könnte sich an der fundamentale Idee der Linearisierung orientieren. Man kann ja weite Teile der Analysis als Übersetzung und Erweiterung linearer Modelle deuten. In dieser Deutung wird *differenzierbar* als *linear approximierbar* definiert. Es ist dann vorteilhaft, wenn man schon die Differentialrechnung in einer Variablen auf dem Konzept der Linearisierung aufgebaut hat oder zumindest diesen Aspekt einbezogen hat. Dies bedeutet die Verwendung folgender Eigenschaft:

Die Funktion f mit $y_0 = f(x_0)$ heißt *differenzierbar* im Punkt x_0, wenn es eine affin-lineare Funktion $y = y_0 + k(x - x_0)$ gibt, die f in einer Umgebung von x_0 „gut" approximiert.

Es ist auch notwendig, daß man zuvor (oder besser daneben!) das lineare Modell gründlich studiert. Anregungen dazu findet man etwa in einer schönen Arbeit von KIRSCH, in der die nachstehende richtungsweisende Aussage zu finden ist: „Das wichtigste Ergebnis unserer Überlegungen dürfte aber die Einsicht in den erschließenden Charakter der linearen Funktionen $R^2 \to R$ sein, wodurch sich die Linearität einmal mehr als fundamentale Idee der Mathematik erweist" (A. KIRSCH 1986: Lineare Funktionen zweier Veränderlicher als erschließender Unterrichtsgegenstand. mathematica didactica 9, 133 -158).

Nützlich ist das nachstehende Lemma.

Lemma („Taylorentwicklung Krabbelstube“):

Sei $z = ax + by + c$ eine affin-lineare Funktion und $z_0 = ax_0 + by_0 + c$, dann gilt $z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$.

Definition: Eine Funktion f in zwei Variablen mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ heißt *differenzierbar* im Punkt (x_0, y_0), wenn f in einer Umgebung von (x_0, y_0) linear approximierbar ist, d.h. es gibt eine affin-lineare Funktion $z = ax + by + c$, sodaß in einer Umgebung von (x_0, y_0) gilt: $f(x, y) \approx z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$.

Natürlich kann die Bedeutung des Zeichens $\approx$ durch ε und δ präzisiert werden, aber zum Verständnis ist dies nicht so wichtig. Man definiert dann die partiellen Ableitungen durch die Gleichungen

$\frac{\partial f}{\partial x} := a$ und $\frac{\partial f}{\partial y} := b$.

Rechnet man konsequent mit der Vorschrift „Alle nichtlinearen Anteile werden vernachlässigt“, so kann man aus der obigen Definition sehr leicht die üblichen Rechenregeln für Summe, Produkt und Verkettung von Funktionen herleiten. Wir wollen dies am Beispiel der „Richtungsableitung“, der Anwendung der Kettenregel auf die Verkettung einer Funktion in zwei Variablen mit einer ebenen Kurve illustrieren.

Die ebene Kurve sei durch ein geordnetes Paar differenzierbarer Funktionen $t \mapsto (x(t), y(t))$ gegeben. Differenzierbar bedeutet in diesem Fall:

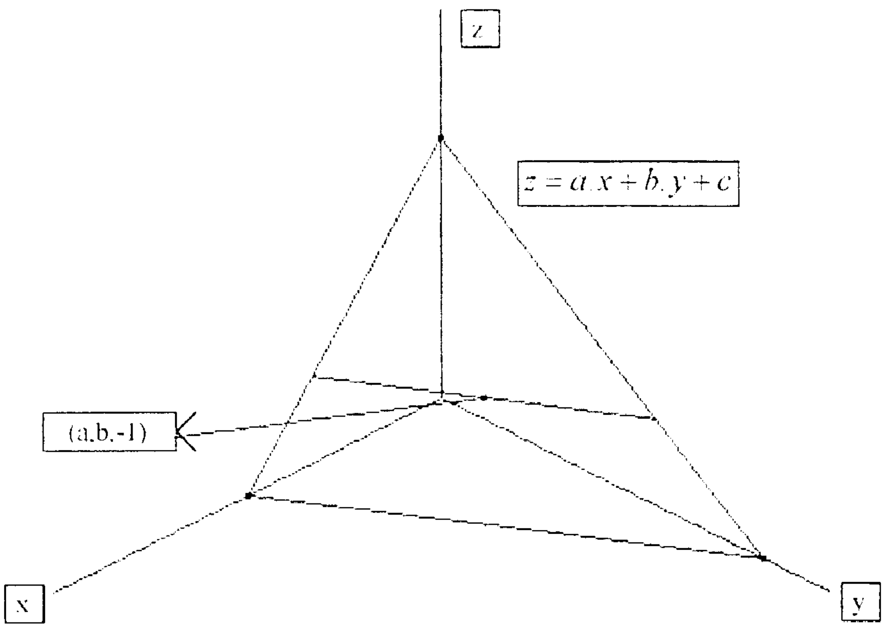
$$x(t) \approx x_0 + u(t - t_0)$$
$$y(t) \approx y_0 + v(t - t_0)$$

Dann ist $f(x(t), y(t)) \approx z_0 + a(x(t) - x_0) + b(y(t) - y_0) \approx z_0 + (au + bv)(t - t_0)$, woraus folgt, daß die Ableitung in Richtung (u, v) gegeben ist durch den Ausdruck $\frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial f}{\partial y}v$. Daraus ergibt sich leicht, daß die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ als Ableitung in der x-Richtung und $\frac{\partial f}{\partial y}$ als Ableitung in der y-Richtung aufzufassen sind. Damit können partielle Ableitungen durch die Methoden der eindimensionalen Differentialrechnung berechnet werden. Auch hier kann ein Computeralgebrasystem sinnvoll eingesetzt werden, wie an dem nachstehenden einfachen Beispiel illustriert wird. Kenner werden die

Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die Funktionen $u(x,y) = x^2 - y^2$ und $v(x,y) = 2xy$ bemerken (siehe Abschnitt 5).

```
          2    2
#1:   x    - y                                   User


       d     2     2
#2:   -- (x    - y  )                            Dif(#1,x)
      dx


#3:   2*x                                        Simp(#2)


       d     2     2
#4:   -- (x    - y  )                            Dif(#1,y)
      dy


#5:   - 2*y                                      Simp(#4)


#6:   2*x*y                                      User


      d
#7:   -- (2*x*y)                                 Dif(#6,x)
      dx


#8:   2*y                                        Simp(#7)


      d
#9:   -- (2*x*y)                                 Dif(#6,y)
      dy


#10:  2*x                                        Simp(#9)
```

Bekanntlich ist der Vektor $(a,b,-1)$ ein Normalvektor der Ebene $z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$, bzw. ist der Vektor (a,b) ein Normalvektor zu allen Höhenschichtlinien, den Geraden $ax + by = const$.



Daraus folgt, daß der Vektor $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1)$ ein Normalvektor der Tangentialebene $z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$ ist. Weiters ist der Vektor $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ ein Normalvektor im Punkt (x_0, y_0) einer Höhenschichtlinie $f(x, y) = z_0$. Übrigens hat der Vektor $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ eine weitere schöne geometrische Bedeutung: Das Wandern in dieser Richtung ist eine Wanderung in der Richtung der stärksten Änderung des Funktionswertes. Dies ist anschaulich klar, wenn man bedenkt, daß man orthogonal am „schnellsten" von einer Höhenlinie $f(x, y) = z_0$ zu einer benachbarten Höhenlinie $f(x, y) = z_1$ gelangen wird. Anders ausgedrückt: Senkrecht zu den Höhenlinien geht es am steilsten bergauf oder bergab. Rechnerisch läuft dies auf die Richtigkeit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung hinaus:

$$|f(x_0, y_0) - f(x_1, y_1)| \approx |a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)| \le \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

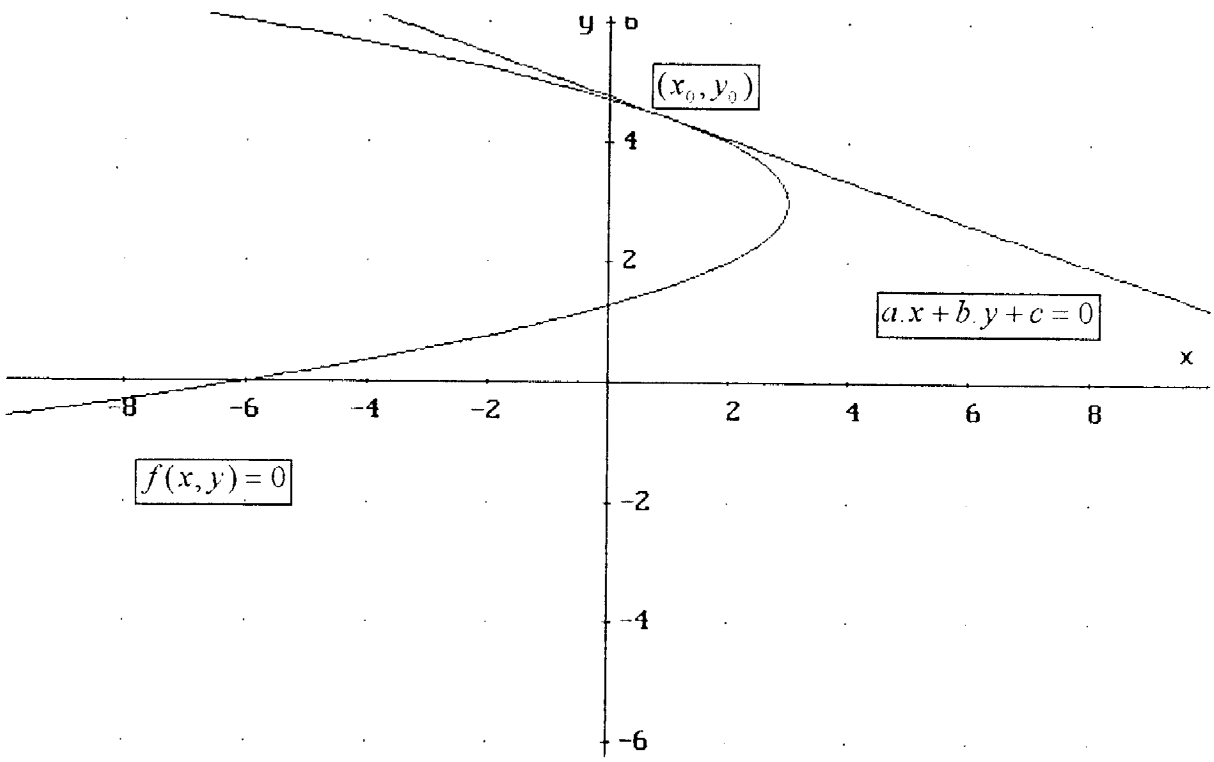
Beachtet man, daß durch

$$\tan\phi = \frac{|f(x_0,y_0) - f(x_1,y_1)|}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 - (y_0 - y_1)^2}}$$

der Neigungswinkel bestimmt ist, so wird dieser maximal, wenn der Vektor $(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ proportional zum Vektor (a,b) ist. KIRSCH gibt in der schon erwähnten Arbeit schöne Aufgaben für Geländesteigungen auf schiefen Ebenen. Dabei ist anzumerken, daß das Wort „eben" zwei Bedeutungen hat: „flach", d.h. ohne Buckel und „flach und fast parallel zur Grundebene". Die erste Bedeutung liegt in der Verwendung „schiefe Ebene" vor (auch wenn sie senkrecht steht: eine Kastentür kann schön eben poliert sein), die zweite Bedeutung trifft für die ungarische Tiefebene zu.

Auch der berühmte *Hauptsatz über implizite Funktionen* kann sehr leicht aus der Idee der Linearisierung gewonnen werden. Die Gerade $ax + by + c = 0$ kann genau dann in die Form $y = kx + d$ umgeschrieben werden, wenn $b \neq 0$ und es gilt sodann $k = -\frac{a}{b}$.

Ebenso kann daher die differenzierbare Kurve $f(x,y) = 0$ genau dann in einer Umgebung des Punktes (x_0, y_0) in die Form $y = g(x)$ umgeschrieben werden, wenn $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ ist. Es gilt sodann $g'(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial y}$ (wobei die rechte Seite im Punkt (x_0, y_0) ausgewertet wird).



Damit kann man sehr einfach die Tangenten für Kurven in „impliziter Darstellung" berechnen. Wendet man diese Methode auf die Kegelschnitte an, ergibt sich leicht, daß die Berechnung der Tangenten mit den Methoden der analytischen Geometrie zum selben Ergebnis führt. Als Beispiel betrachten wir die Gleichung einer Hyperbel in Hauptlage:

Aus $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ errechnet man leicht $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x_0}{a^2}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y_0}{b^2}$. Daraus erhält man wie erwartet die Gleichung der Tangente in der Form $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$.

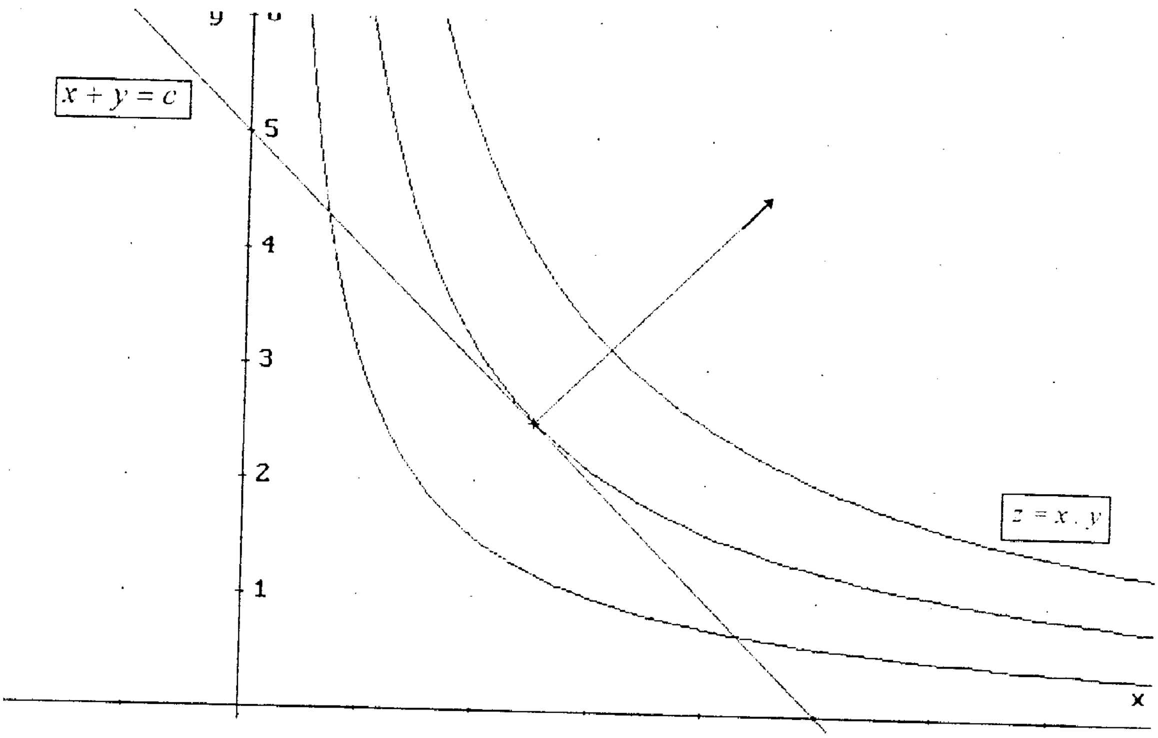
Aus der Idee der Linearisierung ist auch klar, daß an den Stellen, wo eine Funktion in zwei Variablen ein *lokales Extremum* besitzt, die Tangentialebene parallel zur Grundebene sein muß. Daher sind die Bedingungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ *notwendige* Bedingungen für ein lokales Extremum. Sogar die oft als schwierig angesehene, aber so bequeme *Lagrangesche Methode* erscheint noch zugänglich. Die *Nebenbedingung* $g(x,y) = 0$ ist eine ebene Kurve. Die Höhenschichtlinien $f(x,y) = z_0$ stellen bei variablem Wert von z_0 eine Kurvenschar dar. In einem lokalen Extremum mit der gegebenen Nebenbedingung berühren sich die Kurven $g(x,y) = 0$ und $f(x,y) = z_0$ im Punkt (x_0, y_0). Dies bedeutet aber, daß die Gradienten dort proportionale Vektoren sind! Daher sind die Kandidaten für ein lokales Extremum unter der *Nebenbedingung* $g(x,y) = 0$ durch die drei Gleichungen

$$g(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

bestimmt. Wir wollen dies an der einfachen Aufgabe, das flächengrößte Rechteck unter allen Rechtecken mit gegebenem Umfang zu bestimmen, illustrieren. Hier ist $g(x,y) = x + y - c$ und $f(x,y) = xy$. Aus der Proportionalität der Gradienten erhält man: $x = \lambda$ und $y = \lambda$, woraus sofort $x = y$ folgt, d.h. die Lösung ist ein Quadrat.



Eine schöne Anwendung ist auch die Herleitung des Brechungsgesetzes mittels dieser Technik. Die Lagrangesche Methode ist eine Gelegenheit, mathematische Eleganz zu erleben.

5. Ausblicke

In wenigen Worten sei auf mögliche Erweiterungsstoffe hingewiesen. Man kann etwa Funktionen in drei oder allgemeiner in n Variablen untersuchen.
Kurven in der Ebene und im Raum sind Abbildungen, deren Werte Listen mehrerer Variablen darstellen. Hinweise auf die Kinematik und Dynamik von Massenpunkten, wobei die Zeit als typische Variable auftritt, können Querverbindungen zur Physik herstellen.

Auch die Untersuchung differenzierbarer Abbildungen $f: G \subseteq R^2 \to R^2$ ist möglich. Einerseits kennt der Schüler schon zahlreiche Abbildungen dieser Art, nämlich Bewegungen (insbesonders: Schiebungen, Drehungen und Spiegelungen) und zentrische Streckungen. Diese sind natürlich alle affin-linear, aber ein Ausblick auf einfache gebrochen-lineare Abbildungen oder die Inversion am Einheitskreis wäre denkbar. Als

Beispiele nenne ich etwa

$$X = \frac{1-x}{1+x},\ Y = \frac{y}{1+x}$$

(diese projektive Abbildung bildet den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ auf die Parabel $Y^2 = X$ ab) oder die schon genannte Inversion am Einheitskreis:

$$X = \frac{x}{x^2+y^2},\ Y = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Da sich die durch Iteration komplexer Funktionen erzeugten Fraktale und ähnliche Mengen, wie die berühmte Mandelbrotmenge, auch bei Schülern einer gewissen Beliebtheit erfreuen, wäre auch ein Einstieg die Untersuchung komplex differenzierbarer Funktionen denkbar. Diese sind ja unter den Abbildungen $f: G \subseteq R^2 \to R^2$ dadurch ausgezeichnet, daß der lineare Anteil der approximierenden affin-linearen Abbildung eine Drehstreckung ist. Ist in diesem Fall $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, so gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, nämlich $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Ebenso könnte eine Deutung der Lösungsmannigfaltigkeit linearer Gleichungssysteme als „Niveauflächen" entsprechender affin-linearer Abbildungen des R^n in den R^m eine weitere Vernetzung mit der Algebra herstellen. Hat man partielle Ableitungen zur Verfügung, so kann man natürlich auch an partielle Ableitungen höherer Ordnung denken und somit die schon erwähnte Schrödingergleichung „lesbar" machen. Ein anderer Ausblick, der auch schon bei KIRSCH zu finden ist, ist das Thema Kurvenintegrale. KIRSCH schlägt vor, Kurvenintegrale als Höhengewinn entlang des Integrationsweges zu deuten. Natürlich sollten auch Flächenintegrale nicht verboten sein. Dies sind alles nur Vorschläge für mögliche Ausblicke in speziellen Kursen mit mathematisch begabten und interessierten Schülern. Keineswegs kann daran gedacht werden, in der Schule eine Analysisvorlesung aufzubauen!

6. Didaktische Bewertung

Zusammenfassend soll eine Bewertung des Themas versucht werden. Die erste Frage ist wohl, wo gibt es Unterlagen dazu? Material ist genügend vorhanden, allerdings vom didaktischen Standpunkt aus überwiegend „Rohmaterial", nämlich zahlreiche Bücher über Analysis und wohl vielleicht noch vorhandene eigene Vorlesungsmitschriften. Vielleicht eine Chance das Gelernte aufzufrischen? „Didaktisch aufbereitetes" Material scheint leider spärlich zu sein. Die schon erwähnte Arbeit von KIRSCH ist eine erfreuliche Ausnahme. Daher wäre selbständiges Arbeiten möglich und nötig! Dies gilt sowohl für den Lehrer, der dieses Thema für die Schule aufbereiten möchte, als auch für die interessierten Schüler, die da mitmachen möchten.

Aber es sei nochmals an die große Bedeutung des Themas erinnert. Es hat einen hohen Grad an Vernetzung von Algebra, Geometrie und Analysis (mit Ausblicken auf die stochastische Denkweise, die auf andere Art, nämlich etwa durch Datenreduktion, mit multifaktoriellem, oft unkontrollierbarem Geschehen umzugehen versucht). Der Einsatz geeigneter Computerprogramme ist möglich und wohl auch sehr hilfreich. Und zuletzt seien nochmals die philosophischen und wissenschaftstheoretische Bezüge angemahnt, die durch die Modellierung multikausaler Vorgänge angedeutet werden können.

Zuletzt möchte ich Herrn Dr. Karl Josef Fuchs für die Hilfestellung bei der Erstellung der Graphiken danken.

Dr. Fritz Schweiger
Institut für Didaktik der Naturwissenschaften
Universität Salzburg
Hellbrunnerstraße 34
5020 Salzburg